10 класс (алгебра)

Ирина Акоповна Тарасян
МОУ «СОШ №15», город Майкоп

Тема: Частные приемы решения показательных и логарифмических уравнений.

Цели урока: Обучить учащихся искусственным приемам решения логарифмических и показательных уравнений, развития логического мышления, и вычислительных навыков.

Ход урока.

I. Актуализация опорных знаний

На магнитной доске вывешиваются наглядные пособия.

1. *Указать пример где неверно поставлен знак* $\Leftrightarrow$

a. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1<1 \end{cases}$

b. $\log_2(2-x)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 2-x=x^2 \end{cases}$

c. $(\sin x+\sqrt{2})^x<1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x+\sqrt{2}<1 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin x+\sqrt{2}>1 \\ x<0 \end{cases}$

d. $x\cdot\log_2 x=0 \Leftrightarrow (x=0 \vee \log_2 x=0)$

e. $\log_2 x=\log_2(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-1 \\ x>0 \end{cases}$

Ответ: Знак $\Leftrightarrow$ неверно стоит в (d), так как $x\cdot\log_2 x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1,$ т.е. не была учтена область определения функции $y=x\cdot\log_2 x$.

2. Верно ли $f(x)\cdot g(x)=0$ равносильно

$$\left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \quad (*)$$

Ответ: неверно

Пример: $(x+4)\lg(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+4=0 \\ \lg(x-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=3 \end{array}\right.$

Вопрос: Какой знак нужно поставить в $(*)$?

Ответ: Нужно поставить знак следование.

Вопрос: Как верно записать предложение $(*)$, используя знак равносильности?

Ответ: $f(x)\cdot g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0, где \end{array}\right. \\ x\in D(n),\ n(x)=f(x)\cdot g(x) \end{cases}$

II. Некоторые частные приемы решения логарифмических и показательных уравнений

Решение уравнений.

1. $3\cdot 16^x + 36^x = 2\cdot 81^x$

Решение: Т.к. $81^x \neq 0$ при любом x, то данное уравнение равносильно уравнению $3\cdot\left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 2$. Пусть $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t, \quad t>0$ получим

$3t^2+t-2=0 \Leftrightarrow (t_1=-1 \vee t_2=\frac{2}{3})$.

Итак: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = -1$ — *решений нет*; $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Решить уравнение $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 8$

Решение: Заметим, что основание степеней, т.е. числа $4+\sqrt{15}$ *и* $4-\sqrt{15}$ являются взаимообратными, поэтому выразим одно основание степени через другое $4+\sqrt{15}=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}$ и получим уравнение в котором все степени имеют одинаковые основания.

$(4+\sqrt{15})^x + (4+\sqrt{15})^{-x} = 8$

Пусть $t=(4+\sqrt{15})^x$, $t>0$, получим $t+\frac{1}{t}=8$, $\frac{t^2-8t+1}{t}$, $t\neq 0$.

$t_1=4+\sqrt{15}$ и $t_2=4-\sqrt{15}$.

Корни полученного уравнения:

$x_1=1$ $x_2=-1$

Ответ: -1;1.

3. Решить уравнение $3^x+4^x=5^x$.

Решение: Воспользуемся тем, что $5^x>0$ при любом x, перейдем к равносильному уравнению $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$, заметим $x=2$ решение уравнения.

Покажем, что другого решения нет.

Функция $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ убывающая, как сумма двух убывающих функций и поэтому каждое свое значение принимает только один раз.

Ответ: 2.

4. Решить уравнение $2^{\log_5 x}+x^{\log_5 x}=7-4^{\frac{1}{3}\log_4 27}$

Решение: докажем, что $2^{\log_5 x}=x^{\log_5 2}$. Действительно

$2^{\log_5 x}=2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}}=2^{(\log_2 x)\cdot\frac{1}{\log_2 5}}=x^{\log_5 2}$, учитывая это получим

$2\cdot 2^{\log_5 x}=7-3\Leftrightarrow 2\cdot 2^{\log_5 x}=4\Leftrightarrow 2^{\log_5 x}=2\Leftrightarrow \log_5 x=1\Leftrightarrow x=5$

Ответ: 5.

III. Самостоятельная работа

Вариант 1.

1) $\left(5+\sqrt{24}\right)^{\frac{x}{2}}+\left(5-\sqrt{24}\right)^{\frac{x}{2}}=10$
2) $12^x+5^x=13^x$
3) $x^{1-\frac{1}{3}\lg_x 2}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$

Вариант 2.

1) $(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=62$

2) $3^x+4^x=7$

3) $x^{3\lg x-\frac{1}{\lg x}}=\sqrt[3]{10}$

Вариант 3.

1) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$

2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$

3) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\cdot\sqrt[3]{10}$

Ответы:

В-1: 1. -2;2. 2. 2. 3. $10^{-\frac{1}{2}}$,100.

В-2: 1. -2;2. 2. 1. 3. $\sqrt[3]{100}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$.

В-3: 1. 4. 2. 1. 3. 10; 0.1.

Задание на дом. (Индивидуальные карточки)

Карточка 1.

1. $2^x+5^x=7^x$
2. $(3-2\sqrt{2})^{x^2-6x+9}+(3+2\sqrt{2})^{x^2-6x+9}=6$
3. $6^{\log_{\sqrt{3}} x}-7\cdot 6^{\log_3 x}+6=0$
4. $9\cdot 4^x-13\cdot 6^x+4\cdot 9^x=0$
5. $\log_2(3^x+1)+2\log_4(3^x-1)=3$